

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

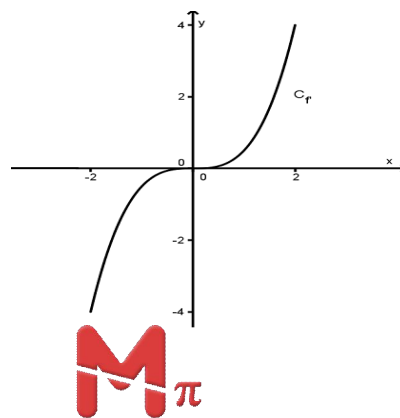


Με την νέα ύλη 2016

Θετικών Σπουδών &
Σπουδών Οικονομίας και Πληροφορικής

Κατηγοριοποιημένα

Τα θέματα του ψηφιακού σχολείου του ΥΠ.Π.Ε.Θ. (study4exams)




Μαθηματικός Περικλητής
mathp.gr

Επιμέλεια έκδοσης: www.mathp.gr

Συντονιστής: Καραγιάννης Ιωάννης, Σχολικός Σύμβουλος ΠΕ03

Περιεχόμενα

Θέμα 1ο	3
Ερωτήσεις αντικειμενικού τύπου.....	4
Θέμα 2ο.....	13
Κεφάλαιο 2°	14
Κεφάλαιο 3°	17
Κεφάλαιο 4°.....	21
Θέμα 3ο	22
Κεφάλαιο 2°	23
Κεφάλαιο 3°	27
Κεφάλαιο 4°.....	32
Θέμα 3ο	33
Κεφάλαιο 2°	34
Κεφάλαιο 3°	36

ΘΕΜΑ 1^ο

Ερωτήσεις Θεωρίας κλειστού τύπου –Ψηφιακό Σχολείο του Υπουργείου Παιδείας

Α. Ερωτήσεις Σωστού-Λάθους

1. Μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνάρτηση 1-1, αν και μόνο αν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή:

$$\text{αν } x_1 = x_2, \text{ τότε } f(x_1) = f(x_2) .$$

2. Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) ελάχιστο, το $f(x_0)$, όταν $f(x) < f(x_0)$ για κάθε $x \in A$.

3. Αν υπάρχουν στο $\mathbb{R}$ τα όρια των συναρτήσεων f, g όταν $x \rightarrow x_0$, τότε ισχύει;

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}, \text{ εφόσον } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0$$

4. Για κάθε συνάρτηση f η γραφική παράσταση της $|f|$ αποτελείται από τα τμήματα της C_f , που βρίσκονται πάνω από τον άξονα $x'x$ και από τα συμμετρικά, ως προς τον άξονα $x'x$, των τμημάτων της C_f , που βρίσκονται κάτω από τον άξονα $x'x$.

5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - 1}{x} = 1$

6. Οι γραφικές παραστάσεις C και C^{-1} των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$ που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$.

7. Κάθε συνάρτηση που είναι «1-1» είναι γνησίως μονότονη.

8. Έστω μια συνάρτηση ορισμένη σ' ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ και l ένας πραγματικός αριθμός. Τότε ισχύει η ισοδυναμία:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - l) = 0$$

9. Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (a, β) , τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (A, B) , όπου:

$$A = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \text{ και } B = \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x).$$

10. Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (a, β) , τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (A, B) , όπου:

$$A = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \text{ και } B = \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x).$$

11. Αν ορίζονται οι συναρτήσεις $f \circ g$ και $g \circ f$, τότε πάντοτε ισχύει $f \circ g = g \circ f$.
12. Αν η συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι «1-1», τότε ισχύει $f^{-1}(f(x)) = x, x \in A$.
13. Αν μία συνάρτηση f είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ τότε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l, \text{ αν και μόνο αν } \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l$$

14. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ και $f(x) < 0$ κοντά στο x_0 τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$
15. Αν $a > 1$, τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$
16. Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού $\mathbb{R}$ και ορίζονται οι συνθέσεις $f \circ g$ και $g \circ f$, τότε αυτές οι συνθέσεις είναι υποχρεωτικά ίσες.
17. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $-f$ είναι συμμετρική, ως προς τον άξονα $x'x$, της γραφικής παράστασης της f .
18. Αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 .
19. Υπάρχουν συναρτήσεις που είναι «1-1», αλλά δεν είναι γνησίως μονότονες.
20. Αν για δύο συναρτήσεις f, g ορίζονται οι $f \circ g$ και $g \circ f$, τότε είναι υποχρεωτικά $f \circ g \neq g \circ f$
21. Μια συνάρτηση f είναι «1-1», αν και μόνο αν κάθε οριζόντια ευθεία (παράλληλη στο $x'x$) τέμνει τη γραφική παράστασή της σε ένα τουλάχιστον σημείο.
22. Αν f, g, h είναι τρεις συναρτήσεις και ορίζεται η $h \circ (g \circ f)$, τότε ορίζεται και η $(h \circ g) \circ f$ και ισχύει $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.
23. Μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι «1-1», αν και μόνο αν για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση $f(x) = y$ έχει ακριβώς μία λύση ως προς x .
24. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο x_0 , τότε η σύνθεσή τους $g \circ f$ είναι συνεχής στο x_0 .
25. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δεν μηδενίζεται σ' αυτό, τότε αυτή ή είναι θετική για κάθε $x \in \Delta$ ή είναι αρνητική για κάθε $x \in \Delta$, δηλαδή διατηρεί πρόσημο στο διάστημα Δ .
26. Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς συνάρτησης f είναι διάστημα.
27. Ισχύει $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\nu = +\infty, \nu \in \mathbb{N}$

28. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0 .

29. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$.

30. Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

31. Αν $x \neq 0$, τότε ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$

32. Μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνάρτηση «1-1», αν και μόνο αν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: αν $x_1 = x_2$, τότε $f(x_1) = f(x_2)$.

33. Αν υπάρχουν στο $\mathbb{R}$ τα όρια των συναρτήσεων f και g όταν $x \rightarrow x_0$, τότε ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}, \text{ εφόσον } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0$$

34. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$, τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι $[f(a), f(\beta)]$ ή $[f(\beta), f(a)]$.

35. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l \in \mathbb{R}$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$.

36. Αν η συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι «1-1», τότε ισχύει η ισοδυναμία:

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

37. Αν η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα τότε $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

38. Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη και συνεχής σε ένα διάστημα Δ και $f'(x) \neq 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ , τότε η f είναι «1-1» στο Δ .

39. Αν μια συνάρτηση f είναι κυρτή σε ένα διάστημα Δ , τότε η εφαπτομένη της C_f σε κάθε σημείο $x_0 \in \Delta$ είναι «κάτω» από τη C_f .

40. Αν $f(x) = a^x$, $a > 0$ τότε $f'(x) = a^x \ln a$.

41. Αν για μια συνάρτηση f ισχύει $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$, τότε η f είναι σταθερή στο $\mathbb{R}^*$.

42. Η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$ είναι παραγωγίσιμη στο $x = 0$.

43. Αν για μια παραγωγίσιμη συνάρτηση f ισχύει $f(a) = f(\beta)$ με $a < \beta$, τότε ορίζεται η

$$\frac{1}{f'(x)} \text{ στο } [a, \beta].$$

44. Αν το $(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f και η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση στο x_0 , τότε $f''(x_0) = 0$.
45. Αν μια συνάρτηση είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.
46. Αν για μια παραγωγίσιμη συνάρτηση f ισχύει $f'(x_0) = 0$ στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε κατ' ανάγκη έχει τοπικό ακρότατο στο x_0 .
47. Ανάμεσα σε δυο ρίζες μιας πολυωνυμικής συνάρτησης, υπάρχει πάντα τουλάχιστον μια ρίζα της παραγώγου της.
48. Αν για μια συνάρτηση f ορισμένη και συνεχή σε ένα διάστημα Δ ισχύει $f'(x) < 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ , τότε η f είναι «1-1» στο Δ .
49. Αν $f'(x) = x \cdot (x-1)^2 \cdot (x-2)$, τότε η συνάρτηση f παρουσιάζει στο $x = 0$ τοπικό μέγιστο.
50. Αν $f'(x) = x \cdot (x-1)^2 \cdot (x-2)$, τότε η συνάρτηση f παρουσιάζει στο $x = 1$ τοπικό μέγιστο.
51. Αν $f'(x) = x \cdot (x-1)^2 \cdot (x-2)$, τότε η συνάρτηση f παρουσιάζει στο $x = 2$ τοπικό ελάχιστο.
52. Αν μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ έχει συνεχή πρώτη παράγωγο και $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε η f είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$.
53. Αν η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f έχει στο $+\infty$ οριζόντια ασύμπτωτη, τότε δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$.
54. Αν μια συνάρτηση f ορίζεται στο σημείο x_0 , αλλά δεν είναι συνεχής στο x_0 , τότε δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .
55. Αν για μια συνάρτηση f και για ένα σημείο $x_0 \in D_f$ ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

, τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .

56. Μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[a, \beta]$ δεν έχει ασύμπτωτες.
57. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε διάστημα Δ και δυο φορές παραγωγίσιμη στο

- εσωτερικό του Δ . Αν f κυρτή στο Δ , τότε $f''(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ .
- 58.** Δίνεται συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ . Στα εσωτερικά σημεία του Δ όπου η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο, η C_f έχει οριζόντια εφαπτομένη.
- 59.** Αν μια συνάρτηση f ορίζεται και είναι δυο φορές παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β) και το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ με $x_0 \in (\alpha, \beta)$ είναι σημείο καμπής της C_f , τότε $f''(x_0) = 0$.
- 60.** Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 2, δεν έχουν ασύμπτωτες.
- 61.** Αν για τη συνεχή και δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει $f''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε η C_f δεν έχει σημεία καμπής
- 62.** Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: (a, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (a, \beta)$. Τότε η f παρουσιάζει ελάχιστο στο β το $f(\beta)$.
- 63.** Δίνεται η συνάρτηση $h(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, με $P(x), Q(x)$ πολυώνυμα βαθμού $n \geq 1$ και $Q(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, όπου ο βαθμός του αριθμητή ισούται με το βαθμό του παρονομαστή. Τότε η γραφική παράσταση της συνάρτησης δεν έχει ασύμπτωτες στο $+\infty$ ή στο $-\infty$.
- 64.** Ισχύει η σχέση $\int_a^\beta f(x)g'(x)dx = [f(x) \cdot g(x)]_a^\beta - \int_a^\beta (f'(x) \cdot g(x))dx$, όπου f', g' είναι συνεχείς συναρτήσεις στο $[a, \beta]$.
- 65.** Ισχύει η ισοδυναμία: $\int_a^\beta f(x)dx = 0 \Leftrightarrow a = \beta = 0$
- 66.** Ισχύει: $\left(\int_a^\beta f(x)dx\right)' = 0$
- 67.** Ισχύει: $\int_a^\beta cdx = c(a - \beta)$.
- 68.** Αν f', g' είναι συνεχείς συναρτήσεις στο διάστημα $[a, \beta]$, τότε:
- $$\int_a^\beta f(x)g'(x)dx = \int_a^\beta f(x)dx \cdot \int_a^\beta g'(x)dx.$$
- 69.** Αν η f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$, τότε το $\int_a^\beta f(x)dx$ παριστάνει εμβαδόν.
- 70.** Αν f, g συνεχείς στο $[a, \beta]$ με $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in [a, \beta]$ και η f δεν είναι παντού ίση με τη g στο $[a, \beta]$, τότε $\int_a^\beta f(x)dx > \int_a^\beta g(x)dx$.
- 71.** Αν $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \Delta$ και $\alpha, \beta \in \Delta$, τότε $\int_a^\beta f(x)dx < 0$.

72. Αν $\int_a^\beta f(x)dx \geq 0$, τότε κατ' ανάγκη θα είναι $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$.

73. Αν f συνάρτηση συνεχής στο διάστημα $[a, \beta]$ και για κάθε $x \in [a, \beta]$ ισχύει $f(x) \geq 0$.
και η συνάρτηση f δεν είναι παντού 0 στο διάστημα αυτό τότε $\int_a^\beta f(x)dx > 0$.

74. Αν $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, τότε το πεδίο ορισμού της F είναι ίδιο με το πεδίο ορισμού της f .

75. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[a, \beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[a, \beta]$, τότε:

$$\int_a^\beta f(t)dt = G(a) - G(\beta).$$

76. Αν η f είναι συνεχής σε διάστημα Δ και $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$, τότε ισχύει:

$$\int_a^\beta f(x)dx = \int_a^\gamma f(x)dx + \int_\gamma^\beta f(x)dx.$$

77. Κάθε συνάρτηση συνεχής σε ένα διάστημα Δ έχει παράγουσα στο διάστημα αυτό.

78. Αν η f είναι συνεχής σε διάστημα Δ και $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$, τότε ισχύει:

$$\int_\beta^x f(t)dt = \int_a^x f(t)dt + c, c \in \mathbb{R}$$

79. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ και $\int_a^\beta f(x)dx = 0$, τότε κατ' ανάγκη θα είναι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$.

80. Αν $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$, τότε και $\int_a^\beta f(x)dx \neq 0$.

81. Αν $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ είναι μία παράγουσα της f στο Δ , τότε $a \in \Delta$.

82. Αν f, g συνεχείς στο $[a, \beta]$ με $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in [a, \beta]$, τότε:

$$\int_a^\beta f(x)dx \geq \int_a^\beta g(x)dx.$$

83. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, \beta]$ και ισχύει $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$, τότε $\int_a^\beta f(x)dx \geq 0$.

84. Αν $f(x) = \int_2^4 \sqrt{2+t^2} dt$, τότε $f'(3) = 0$.

B. Ερωτήσεις Αντιστοίχισης

1. Να αντιστοιχίσετε κάθε συνάρτηση της στήλης Α με την παράγωγό της από τη στήλη Β.

Στήλη Α	Στήλη Β
1) $\eta\mu 2x$	α) $\eta\mu(2x)$
2) $\eta\mu^2(x)$	β) $2\sigma\upsilon\nu(2x)$
3) $\eta\mu(x^2)$	γ) $\sigma\upsilon\nu(x^2)$
4) $\eta\mu^3(x)$	δ) $2x\sigma\upsilon\nu(x^2)$
	ε) $3\eta\mu^2(x)$
	στ) $3\eta\mu^2(x)\sigma\upsilon\nu(x)$

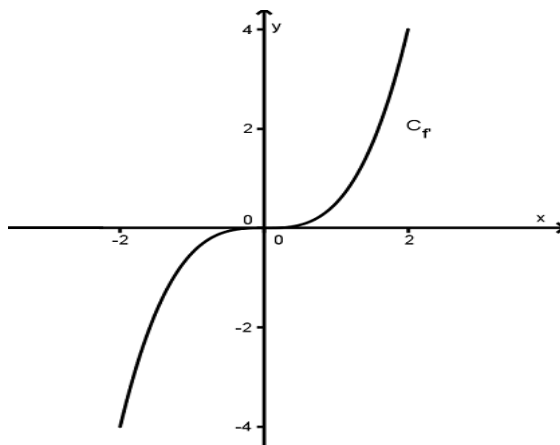
2. Να αντιστοιχίσετε κάθε συνάρτηση της στήλης Α με την ασύμπτωτή της στο $+\infty$ από τη στήλη Β.

Στήλη Α	Στήλη Β
1) $f(x) = 2x + 3 + \frac{1}{\ln x}$	α) $y = 2x + 1$
2) $g(x) = x - 5 + \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2}$	β) $y = x - 5$
3) $h(x) = 2x + 1 + \frac{x + 2}{x + 1}$	γ) $y = 2x + 2$
	δ) $y = x - 4$
	ε) $y = 2x + 3$

3. Να αντιστοιχίσετε κάθε συνάρτηση της στήλης Α με την παράγωγό της από τη στήλη Β.

Στήλη Α f	Στήλη Β f'
1) e^{3x}	α) $3e^x$
2) e^{x^3}	β) e^{3x}
3) $3e^x$	γ) $3x^2e^{x^3}$
4) e^{x+3}	δ) $3e^{3x}$
	ε) e^{x+3}
	στ) e^{3x^2}
	ζ) $e^x + e^3$

4. Στο επόμενο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου f' μιας συνάρτησης f στο διάστημα $[-2, 2]$. Επιλέξτε τη σωστή απάντηση:



Το σημείο $A(0, f(0))$ είναι:

1. θέση τοπικού μέγιστου της f
2. θέση τοπικού ελάχιστου της f
3. σημείο καμπής της C_f

Γ. Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. Δίνεται συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο $x \in \mathbb{R}$ και $x_0 \in \mathbb{R}$ με $f(x_0) = -3$.

Αν $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (-\infty, x_0)$ και $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (x_0, +\infty)$, τότε η f έχει:

- i. καμία ρίζα στο $\mathbb{R}$
- ii. μία ακριβώς ρίζα στο $\mathbb{R}$
- iii. δύο ακριβώς ρίζες στο $\mathbb{R}$
- iv. περισσότερες από δύο ρίζες στο $\mathbb{R}$

2. Επιλέξτε τη σωστή απάντηση:

Αν f παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ με $f'(0) = 0$ και η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, τότε το $f(0)$ είναι:

- i. τοπικό μέγιστο της f
- ii. τοπικό ελάχιστο της f
- iii. δεν είναι ακρότατο της f

3. Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη στο $(0, +\infty)$ με $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 5$.

Ποια από τις παρακάτω προτάσεις δεν είναι κατ'ανάγκη Σωστή ;

- i. Η $y = 5$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$
- ii. $f(x) > 0$ για κάθε $x > 0$.
- iii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 4] = 1$.

ΘΕΜΑ 2^ο

ΘΕΜΑ Β-Ψηφιακό Σχολείο

Κεφάλαιο 2^ο

1. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = -3e^{2x+1} - 5x + 3$.

- i. Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της f ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .
 iii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μια λύση στο $\mathbb{R}$.

2. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x) = 2x^{2011} + 5x - 7$, $x \in \mathbb{R}$.

- i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$..
 ii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$ iii. Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης f .

3. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = 4\sqrt{e^x - 2} + 3$.

- i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της. ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της.
 iii. Να ορίσετε την f^{-1} .

4. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = 2\ln(\sqrt{x-1} + 1) + 3$

- i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f . ii. Να αποδείξετε ότι η f είναι “1-1”.
 iii. Να ορίσετε την f^{-1} . iv. Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(1+x) = 2$.

5. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 3x + 2$.

- i. Να βρείτε το είδος μονοτονίας της f
 ii. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός $x \in \mathbb{R}$ για τον οποίο η συνάρτηση παίρνει την τιμή 2011.
 iii. Να λύσετε την ανίσωση: $3x2^x + 2^x < 1$

6. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = 3x^{2011} + 2x - 5$, $x \in \mathbb{R}$.

- i. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
 ii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μία ρίζα τη $x = 1$.
 iii. Να βρείτε το πρόσημο της f .

7. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, όταν:

- i. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x-1}{f(x)} = +\infty$ ii. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{4x+3} = -\infty$ iii. $\lim_{x \rightarrow 1} [f(x)(3x+4)] = +\infty$

8. Δίνεται η συνεχής και γνησίως μονότονη συνάρτηση $f : [1, 5] \rightarrow \mathbb{R}$ της οποίας η γραφική

παράσταση περνάει από τα σημεία $A(1, 8)$ και $B(5, 12)$.

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

ii. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f παίρνει την τιμή $\frac{29}{3}$.

iii. Υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (1, 5)$ τέτοιο, ώστε:

$$f(x_0) = \frac{2f(2) + 3f(3) + 4f(4)}{9}$$

9. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \ln(3e^x + 1) - 2$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

ii. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

iii. Να ορίσετε την f^{-1} .

iv. Να λύσετε την ανίσωση:

$$f(x) < f^{-1}(\ln 5 - 2) - 2.$$

10. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = -2x^3 - 3x - 1$

i. Να βρείτε το είδος μονοτονίας της f

ii. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

iii. Να λυθεί η εξίσωση: $f^{-1}(x) = 2$

iv. Να λυθεί η ανίσωση: $f^{-1}(x) \geq x - 1$

11. Δίνεται η γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f(f(x)) + f(x) = 3x + 2 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και } f(1) = 3$$

i. Να βρείτε το $f^{-1}(1)$

ii. Να βρείτε το $f(3)$

iii. Να λυθεί η εξίσωση $f^{-1}(x) = 3$

iv. Να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3\sin x + \eta\mu x + x}{f(f(x)) + f(x) - 2}$

12. Δίνεται η συνεχής στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f για την οποία ισχύει ότι:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - \sqrt{x} + \eta\mu(x-1)}{x^2 - 1} = 2$$

i. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f περνάει από το σημείο $M(1, 1)$

ii. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|3f(x) - 2| - 1}{x^2 - 1}$

13. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = 2 \ln \frac{x+1}{1-x} + 3$.

- i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
- ii. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.
- iii. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να μελετήσετε την f^{-1} ως προς τη συνέχεια.
- iv. Να βρείτε τα όρια: $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

14. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ και η συνάρτηση g με τύπο $g(x) = \ln \frac{x+2}{2-x}$

- i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της $f \circ g$.
- ii. Να βρείτε συνάρτηση h για την οποία να ισχύει: $(h \circ g)(x) = x$.
- iii. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h είναι περιττή.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^ο

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{x-2} + x - 3$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

β) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$ και το σύνολο τιμών της f .

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 4x^3 + 2(\lambda - 1)x - \lambda$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον μια ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο διάστημα $(0, 1)$.

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x^2)$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και την παράγωγο της f .

ii. Να βρείτε τα σημεία της C_f στα οποία η εφαπτομένη διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

iii. Να τη μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

iv. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f .

4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{4}{x}$, $x \neq 0$.

i. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $M(x_0, f(x_0))$ με $x_0 \neq 0$.

ii. Να δείξετε ότι το τρίγωνο το οποίο σχηματίζει η προηγούμενη εφαπτομένη με τους άξονες έχει σταθερό εμβαδό.

iii. Αν A και B τα σημεία που η εφαπτομένη στο M τέμνει τους άξονες, να δείξετε ότι το M είναι το μέσο του τμήματος AB .

5. Να βρείτε τη δεύτερη παράγωγο της συνάρτησης:

$$f(x) = \begin{cases} x^4 + 5x, & x \geq 0 \\ 5\eta\mu x, & x < 0 \end{cases}.$$

6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 3x + 1$. Να βρείτε αν υπάρχουν σημεία της γραφικής

παράστασης της f στα οποία η εφαπτομένη:

i. να είναι παράλληλη στην ευθεία $y = x$ ii. να σχηματίζει γωνία 135° με τον άξονα $x'x$

iii. να είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$ iv. να είναι κάθετη στην ευθεία $y = \frac{1}{2}x$.

7. Να παραγωγίσετε τις παρακάτω συναρτήσεις

i. $x^{\eta\mu x}$, $x > 0$ ii. $2^{x \cdot \ln x}$, $x > 0$ iii. $\sqrt{5x^8 + 1}$

8. Αν για τη συνάρτηση f ισχύει:

$$-2x + 1 \leq f(x) \leq x^4 - 2x + 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

τότε:

i. Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x = 0$

ii. Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x = 0$ και ισχύει $f'(0) = -2$

9. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ μια συνάρτηση η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 > 0$. Να

υπολογίσετε τα όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sqrt{f(x)} - \sqrt{f(x_0)}}{x^2 - x_0^2}$ ii. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^3(x) - f^3(x_0)}{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}$

10. Θεωρούμε ορθογώνιο, του οποίου η μια κορυφή είναι το σημείο $O(0, 0)$, δυο πλευρές

βρίσκονται πάνω στους θετικούς ημιάξονες Ox , Oy και η τέταρτη κορυφή κινείται πάνω

στην ευθεία $y = -\frac{1}{4}x + 2$

Να βρείτε τις διαστάσεις του a , b , ώστε να έχει μέγιστο εμβαδό.

11. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, για την οποία ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 5}{x} = 2.$$

Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ και $f'(0) = 2$.

12. Δίνεται συνάρτηση $f(x) = e^x \cdot \eta\mu x$. Να δείξετε ότι:

$$f^{(3)}(x) + 2f'(x) = 2f''(x).$$

- 13.** Να δείξετε ότι: $2\ln(x-1) \leq x-3+\ln 4$ για κάθε $x > 1$.
- 14.** Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = x^3$ στο σημείο της $A(1, 1)$ εφάπτεται και στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = 2x^2 + 7x$.
- 15.** Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^4 + 24x^2 + 4x - 40 = 0$ έχει το πολύ δυο πραγματικές ρίζες.
- 16.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 4x + 3$.
- i.** Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f που είναι κάθετη στην ευθεία $\varepsilon: y = -\frac{1}{2}x + 7$.
- ii.** Να βρεθούν τα σημεία επαφής των εφαπτόμενων της C_f που διέρχονται από το $O(0, 0)$.
- iii.** Υπάρχουν εφαπτόμενες που διέρχονται από σημείο $A(2, 0)$;
- 17.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + \kappa \cdot x - 1$, $\kappa \in \mathbb{R}$
- i.** Αν η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(0, f(0))$ είναι παράλληλη στην ευθεία με εξίσωση $y = 3x + 5$, να βρείτε την τιμή του κ .
- ii.** Αν $\kappa = 2$ να δείξετε ότι η ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$ είναι η ευθεία με εξίσωση $y = 2x - 1$.
- 18. i.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 + 2ax^3 + 24x^2 + 5x - 7$, $a \in \mathbb{R}$. Να βρείτε το ευρύτερο δυνατό διάστημα των τιμών του a , ώστε η συνάρτηση να είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.
- ii.** Για ποια τιμή του $a \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση του προηγούμενου ερωτήματος έχει σημείο καμπής το $A(1, f(1))$;

19. α) Να αποδείξετε τις παρακάτω ανισότητες:

i. $e^{x-1} \geq x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ii. $e^{x^2} \geq 1-x$, για κάθε $x \geq 0$.

β) Να δείξετε ότι: $e^x + x \geq \frac{x^2}{2} + 1$, για κάθε $x \geq 0$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^ο

1. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με: $f(x) = \frac{2x^3 + 3x}{x^2 + 1}$

- i.** Να δείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται.
- ii.** Να βρείτε το σύνολο τιμών της.
- iii.** Να βρείτε τις ασύμπτωτες της f αν $x \rightarrow -\infty$.
- iv*.** Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^2} \int_0^x f(t) dt \right)$.

ΘΕΜΑ Γ-ΨΗΦΙΑΚΟ ΣΧΟΛΕΙΟ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^ο

1. Δίνονται οι συνεχείς στο $\mathbb{R}$ συναρτήσεις f και g για τις οποίες ισχύουν:

- $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- Οι γραφικές τους παραστάσεις τέμνονται στο $A(2, -1)$.
- $\rho_1 = -1$ και $\rho_2 = 5$ είναι δύο διαδοχικές ρίζες της $g(x) = 0$.

Να αποδείξετε ότι:

α) η συνάρτηση f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

β) $g(x) < 0$ για κάθε $x \in (-1, 5)$.

γ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(3) \cdot x^4 + 2x^2 + 1}{g(2) \cdot x^3 + 5} = -\infty$

2. Δίνεται η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = 2x^4 + 3\ln x + 1$.

- Na εξετάσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f .
- Na βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .
- Na αποδείξετε ότι για κάθε $a \in \mathbb{R}$, η εξίσωση $f(x) = a$ έχει μοναδική ρίζα.
- Na αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός πραγματικός αριθμός $\lambda > 0$ για τον οποίο ισχύει:

$$\lambda^4 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \ln \frac{1}{\lambda}$$

3. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει η σχέση:

$$2f^3(x) - 3 = 2x - 3f(x), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

- Na αποδείξετε ότι η συνάρτηση είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.
- An το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1} .
- Na λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.
- Na βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1} .

4. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$ και η

γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(-1, 0)$ και $B(2, 3)$.

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

ii. Να βρείτε το πρόσημο της f .

iii. Να λύσετε την εξίσωση $f(2e^x + 1) = 3$.

iv. Να λύσετε την ανίσωση $f(3x + 5) \leq 0$.

5. Δίνεται η συνάρτηση f συνεχής στο $[-3, 3]$ για την οποία ισχύει:

$$3x^2 + 4f^2(x) = 27 \text{ για κάθε } x \in [-3, 3].$$

i. Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$.

ii. Να αποδείξετε ότι η f διατηρεί πρόσημο στο διάστημα $(-3, 3)$.

iii. Να βρεθεί ο τύπος της f

iv. Αν επιπλέον $f(1) = \sqrt{6}$, να βρείτε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - \frac{3\sqrt{3}}{2}}{x}$.

6. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$\sqrt{x^2 + 2x + 9} \leq 3 + xf(x) \leq x^8 \eta \mu \frac{2}{x} + \frac{x}{3} + 3 \text{ για κάθε } x > 0.$$

Να βρείτε:

i. Το όριο: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 9} - 3}{2x}$ ii. Το όριο: $\lim_{x \rightarrow 0} x^7 \eta \mu \frac{2}{x}$ iii. Το όριο: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

iv. Το $f(0)$.

7. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$(f \circ f)(x) + 2f(x) = 2x + 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και } f(2) = 5.$$

i. Να βρείτε το $f(5)$ ii. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται iii. Να βρείτε το $f^{-1}(2)$.

iv. Να λύσετε την εξίσωση: $f(f^{-1}(2x^2 + 7x) - 1) = 2$.

8. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f^2(x) = a^{2x} + 2a^x + 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}^*.$$

i. Να αποδείξετε ότι η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

ii. Αν $f(0) = -2$ να βρείτε τον τύπο της f .

iii. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2f(x) - 3^x}{3 \cdot 2^x + 4 \cdot 3^x}$, $a < 2$.

iv. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2f(x) - 3^x}{3 \cdot 2^x + 4 \cdot 3^x}$, $a > 3$

9. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$x^4 + 1 \leq 4f(x) \leq x^4 + 2 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

i. Να αποδείξετε ότι: $\frac{1}{4} \leq f(0) \leq \frac{1}{2}$ και $\frac{1}{2} \leq f(1) \leq \frac{3}{4}$.

ii. Να βρείτε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 0} \left[x^4 f\left(\frac{1}{x}\right) \right]$.

iii. Να βρείτε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^5 f\left(\frac{1}{x}\right) + 4\eta\mu 3x}{2x^2 + 3\eta\mu x}$.

iv. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in [0, 1]$ τέτοιο, ώστε $f(\xi) - \xi = 0$.

10. i. Αν $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2f(x) - 4}{x} = 2$, να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

ii. Δίνεται η συνάρτηση $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$xg(x) + 2 \leq 2\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x + x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$, αν είναι γνωστό ότι υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός.

iii. Να βρείτε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 f^2(x) + \eta\mu^2(2x)}{\varepsilon\varphi^2 x + x^2 g(x)}$

11. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$3f(x) + 2f^3(x) = 4x + 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

i. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να ορίσετε την f^{-1} .

ii. Να αποδείξετε ότι η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα.

iii. Να βρείτε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1} , αν γνωρίζετε ότι αυτά βρίσκονται πάνω στην ευθεία με εξίσωση $y = x$.

iv. Να λυθεί η εξίσωση: $f(2e^{x-1}) = f(3-x)$.

12. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = \sqrt{x+1} - 1 \quad \text{και} \quad g(x) = 2 - x.$$

- i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων f και g .
- ii. Να ορισθεί η συνάρτηση $f \circ g$.
- iii. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1} .
- iv. Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της συνάρτησης $f \circ f \circ g$.

13. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f με:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x + \kappa \eta \mu x}{x - x^2}, & x < 0 \\ \lambda, & x = 0 \\ \sqrt{8x^2 + x + 16} - 3x, & x > 0 \end{cases}$$

- i. Να βρείτε τα κ, λ .
- ii. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- iii. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
- iv. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 2 \ln(8x+1)$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

14. Δίνεται η συνάρτηση f με:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 5x + 6}{4(x^3 - 2x^2)}, & x \in (-\infty, 0) \cup (0, 2) \\ \frac{\kappa x + 1}{2(x^2 - 4)}, & x \in (2, +\infty) \end{cases}$$

και η $g: \mathbb{R} - \{0,1\} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x \cdot g(x) + 2x}{3x} = 5 \quad \text{και} \quad g(x+3) = g(x) + f(x) \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να βρείτε:

- i. Το κ αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$
- ii. Το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$
- iii. Το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$
- iv. Το όριο $\lim_{x \rightarrow 3} g(x)$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^ο

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{2x} + 5x$.

i. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

ii. Να λύσετε την εξίσωση: $e^{2x^2} - e^{4x-2} = -5x^2 + 10x - 5$.

2. Δίνεται μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $x = 0$ με $f'(0) = 1$ και

για την οποία ισχύει:

$$f(x+y) = f(x) \cdot e^y + f(y) \cdot e^x, \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}.$$

i. Να υπολογίσετε το $f(0)$ και το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$.

ii. Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της με

$$f'(x_0) = f(x_0) + e^{x_0}.$$

3. Αν για τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς a, β ισχύει:

$$a^x + \beta^x \geq 5e^x - 3, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

να δείξετε ότι $a \cdot \beta = e^5$.

4. Έστω f, g συνεχείς συναρτήσεις στο $[0, 1]$ και παραγωγίσιμες στο $(0, 1)$

με $f(0) = f(1) = 0$ και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (0, 1)$.

i. Να δείξετε ότι ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος του Rolle για τη συνάρτηση

$$h(x) = f^2(x) \cdot e^{g(x)} \text{ στο διάστημα } [0, 1].$$

ii. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε:

$$\frac{f'(\xi)}{f(\xi)} = -\frac{g'(\xi)}{2}.$$

5. Αν η ευθεία $y = 3x - 1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, τότε

i. να βρείτε τα όρια $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \lambda x)$

- ii. να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cdot f(x) - 3x^2 - \lambda^2 x + 2}{f(x) + \lambda x + 1} = -1$$

6. Δίνεται συνάρτηση f δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ <για την οποία ισχύουν:

$$f(0) = f'(0) = 0 \text{ και } f''(0) = 2011. \text{ Να υπολογίσετε το όριο:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{e^x \cdot \eta \mu x - x}$$

7. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων της γραφικής παράστασης της $f(x) = x^2$ που

διέρχονται από το σημείο $A\left(\frac{1}{2}, -2\right)$.

8. Δίνεται ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη και κοίλη στο $[0, 3]$. Να δείξετε ότι

$$f(1) + f(2) > f(0) + f(3).$$

9. Να βρείτε το ρυθμό με τον οποίο μεταβάλλεται το εμβαδόν του τριγώνου με κορυφές τα σημεία $A(1, 0)$, $B(x, \ln x)$, $\Gamma(x, 0)$, $x > 1$, τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία το $x = 2 \text{ cm}$.

Δίνεται ότι ο ρυθμός μεταβολής του x είναι σταθερός και ίσος με $0,5 \text{ cm/sec}$.

10. i. Να δείξετε ότι μια πολυωνυμική συνάρτηση $P(x)$ έχει παράγοντα το $(x - \rho)^2$ αν και μόνο αν $P(\rho) = P'(\rho) = 0$.

- ii. Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε το πολυώνυμο $P(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 - 3x - 1$ να έχει

παράγοντα το $(x - 1)^2$.

- 11.** Έστω $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύει:

$$f(x) \geq e^{x-1} + \ln x + x^2 \text{ για κάθε } x > 0 \text{ και } f(1) = 2.$$

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(1, 2)$.

- 12.** Θεωρούμε συνάρτηση f ορισμένη και δυο φορές παραγωγίσιμη στο $(-3, 3)$ η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$f^2(x) + 4f(x) + x^2 - 5 = 0 \text{ για κάθε } x \in (-3, 3) \quad (1)$$

Να δείξετε ότι η C_f δεν έχει σημεία καμπής.

- 13.** Δίνεται η συνεχής και παραγωγίσιμη συνάρτηση f , για την οποία ισχύει:

$$f(e^x \cdot \eta\mu x) = 2 \cdot e^x \text{ για κάθε } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

- i.** Να δείξετε ότι $f'(0) = 2$.
- ii.** Να δείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $A(0, f(0))$ είναι η $y = 2x + 2$.
- iii.** Αν ένα σημείο κινείται πάνω στην προηγούμενη ευθεία και η τετμημένη του αυξάνεται με ρυθμό $x = 2 \text{ cm/sec}$, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του σημείου.

- 14. A.** Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι:

- i.** αν η f είναι άρτια, τότε η f' είναι περιττή
- ii.** αν η f είναι περιττή, τότε η f' είναι άρτια.

- B.** Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια άρτια και παραγωγίσιμη συνάρτηση. Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$g(x) = (x^5 + \sigma\upsilon\nu x) \cdot e^{f(x)} + \eta\mu x + x.$$

- i.** Να δείξετε ότι η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.
- ii.** Να υπολογίσετε την τιμή $g'(0)$.

15. Δίνεται συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \eta \mu \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

i. Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

ii. Να δείξετε ότι εφαρμόζεται το Θεώρημα Rolle για την f στο διάστημα $\left[\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{\pi}\right]$.

iii. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\sigma\varphi \frac{1}{x} = 3x$, έχει τουλάχιστον μια λύση στο διάστημα

$$\left(\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{\pi}\right).$$

16. Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\textbf{i.} \lim_{x \rightarrow 0^+} x^x \qquad \textbf{ii.} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x.$$

17. Δίνεται η άρτια συνάρτηση $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

$$f(1) = 2 \text{ και } x \cdot f'(x) = -3f(x) \text{ για κάθε } x \neq 0.$$

i. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = x^3 \cdot f(x)$ είναι σταθερή σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$.

ii. Να βρείτε τον τύπο της f .

iii. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f .

18. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 24x.$$

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της.

iii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \lambda$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

iv. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής της αν υπάρχουν.

19. Δίνεται πολυωνμική συνάρτηση P για την οποία ισχύει:

$$[P'(x)]^2 = P(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και } P'(1) = 2.$$

Να βρείτε το πολυώνυμο $P(x)$.

20. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με συνεχή πρώτη παράγωγο. Αν για τους αριθμούς $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta < \gamma$ ισχύει $f(\alpha) < f(\beta) < f(\gamma)$, να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\alpha, \gamma)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0) = 0$.

21. Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\text{i. } \lim_{x \rightarrow 0^+} \eta \mu x \cdot e^{\frac{1}{x}} \quad \text{ii. } \lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot e^{\frac{1}{x}}$$

22. Δίνεται η συνάρτηση $f: [1, 6] \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο $[1, 6]$ και παραγωγίσιμη στο $(1, 6)$ με $f(1) = f(6)$.

- i. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (1, 6)$ τέτοιο, ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης f να έχει στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ οριζόντια εφαπτομένη.
- ii. Να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (1, 6)$ με $\xi_1 \neq \xi_2$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi_1) + 4f'(\xi_2) = 0$$

23. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = x^2 - \eta \mu x.$$

- i. Να δείξετε ότι η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.
- ii. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0) = 0$.
- iii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
24. Δίνεται δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν:

$$f(2) = 5, \quad f(1) = 3 \text{ και } f(x) \leq 2x + 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (1, 2)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi) = 0$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^ο

1. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \frac{2e}{x} + 2 \ln x, \quad x > 0.$$

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii. Να αποδείξετε ότι $\left(\frac{x}{e}\right)^x \geq e^{x-e}$ για κάθε $x > 0$.

iii. Αν ισχύει $\left(\frac{x}{e}\right)^x \geq \lambda^{x-e}$ για κάθε $x > 0$ και $\lambda > 0$ τότε να αποδείξετε ότι $\lambda = e$.

iv. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f και τις ευθείες με εξισώσεις $x = 1$ και $x = e^2$.

2. Δίνεται η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \ln x - 1$.

i. Να υπολογίσετε το εμβαδόν $E(\lambda)$ του χωρίου που περικλείεται από τη C_f του άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = e$ και $x = \lambda > 0$.

ii. Να βρείτε το $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} E(\lambda)$.

iii. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $M(e^2, f(e^2))$.

iv. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την παραπάνω εφαπτομένη, την C_f και τον άξονα $x'x$.

ΘΕΜΑ Δ-Ψηφιακό Σχολείο

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^ο

1. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = 3\ln 2x + e^{3x} + 4x - 2$.

i. Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία την f .

ii. Να υπολογίσετε τα όρια: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

iii. Να λυθεί η εξίσωση $f(x) = e^{\frac{3}{2}}$

iv. Να βρείτε τον πραγματικό θετικό αριθμό μ για το οποίο ισχύει:

$$3\ln 4\mu - 3\ln(2\mu^2 + 2) - 4(\mu^2 + 1) = e^{3(\mu^2 + 1)} - e^{6\mu} - 8\mu$$

2. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν οι συνθήκες:

- $|3\eta\mu x - 2xf(x)| \leq \frac{1}{2}x^2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- $4f(x) + 3f(x+1) = 2x^2 - 2013$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

i. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

ii. Να βρείτε το $f(1)$.

iii. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τη γραφική παράσταση της

συνάρτησης $g(x) = x - 1$ σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $x_0 \in (0, 1)$.

3. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε:

$$k\eta\mu^2 x = x^2 f(x) + \sqrt{1 + \eta\mu^2 x} - \lambda \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $A\left(0, \frac{1}{2}\right)$

i. Να βρείτε τα k και λ

ii. Αν $k = 1$ και $\lambda = 1$ να βρείτε την f

iii. Να βρείτε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\sin x}$.

4. Δίνεται η συνάρτηση f με:

$$f(x) = \frac{x^3 \cdot 2^x + 3 \cdot 2^x - 4}{2^x}$$

- i. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα
- ii. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
- iii. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- iv. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = \kappa$ έχει μία ακριβώς ρίζα στο $\mathbb{R}$ για κάθε $\kappa \in \mathbb{R}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^ο

- 1.** Έστω f μια παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f'(x) < x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι:
- i.** η $g(x) = 3f(x) - x^3$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ **ii.** $f(2) - f(1) < 3$
- iii.** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) < 3$.

- 2. i.** Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης $g(x) = x - \ln x$.

- ii.** Να βρείτε τις ασύμπτωτες της $f(x) = e^{\frac{1}{x}} \cdot \ln x$.

- iii.** Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

- 3. i.** Να δείξετε ότι:

$$\ln x + \frac{1}{x} \geq 1 \text{ για κάθε } x > 0.$$

- ii.** Να δείξετε ότι η $g(x) = \ln x + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $\left(\frac{1}{e}, 1\right)$.

- iii.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f(x) = e^x \cdot \ln x$ ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

- iv.** Να μελετήσετε ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής της συνάρτησης f του προηγούμενου ερωτήματος.

- 4.** Αν για τη συνάρτηση f ισχύουν:

- f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ με $f(0) = 2$ και
- $f'(x) \cdot \sin x = f(x)(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)$ για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$,

τότε να βρείτε τον τύπο της.

5. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{e^{\lambda x}}{x+1}, \quad x > -1 \quad \text{και} \quad \lambda > 0.$$

- i. Να δείξετε ότι η f έχει ένα ελάχιστο.
- ii. Να βρείτε για ποια τιμή του λ το προηγούμενο ελάχιστο παίρνει τη μέγιστη τιμή του.

6. A. Να λύσετε την εξίσωση $3^x + 2^x = 5^x$.

B. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f'(x) = -2f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- i. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = e^{2x} \cdot f(x)$ είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.
- ii. Να βρείτε τον τύπο της f αν $f(0) = 1$.
- iii. Αν h, φ παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο $\mathbb{R}$, με:

$$h'(x) + 2h(x) = \varphi'(x) + 2\varphi(x), \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad h(0) = \varphi(0),$$

τότε να δείξετε ότι $h = \varphi$.

7. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = (x^2 + 4x + 3) \cdot e^x.$$

- i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να αποδείξετε ότι έχει ένα ολικό ακρότατο.
- ii. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής της C_f , αν υπάρχουν.
- iii. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f .
- iv. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(0, f(0))$.
- v. Να αποδείξετε την ανισότητα:

$$(x^2 + 4x + 3) \cdot e^x \geq 7x + 3, \quad \text{για κάθε } x \geq -4 + \sqrt{3}.$$

8. Δίνεται συνάρτηση $f(x) = e^x - \ln(x+1) - 1$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της.

iii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

iv. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f .

v. Αν για τους αριθμούς $a, \beta \in \mathbb{R}$ με $2a + \beta > 0$ και $a + 2\beta - 1 > 0$,

ισχύει:

$$e^{a+2\beta-1} - \ln(2a + \beta) + e^{2a+\beta-2} - \ln(a + 2\beta - 1) \leq 2$$

να υπολογίσετε τους a, β .

9. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^{\frac{1}{2x}}$, $x > 0$

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii. Να δείξετε ότι: $\sqrt[12]{6} < \sqrt[10]{5} < \sqrt[6]{3}$

10. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = (x^2 + 1) \cdot \ln x, \quad x > 0.$$

i. Να δείξετε ότι $2x \cdot \ln x + \frac{1}{x} > 0$, για κάθε $x > 0$.

ii. Να μελετήσετε την f ως τη μονοτονία και να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

iii. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in \left(\frac{1}{e}, 1\right)$ τέτοιο, ώστε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$

να είναι σημείο καμπής της C_f .

iv. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f .

11. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = x + \ln(x^2 + 1).$$

i. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

ii. Να λύσετε την εξίσωση: $x - 4 = \ln 17 - \ln(x^2 + 1)$.

iii. Να λύσετε την ανίσωση: $x^3 - x^2 > \ln \frac{x^4 + 1}{x^6 + 1}$.

12. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 \cdot e^x$

i. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα.

ii. Να αποδείξετε ότι: $f'(x+1) > f(x+1) - f(x)$, για κάθε $x > 0$.

13. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $\left[\frac{1}{2}, 3\right]$ και παραγωγίσιμη στο $\left(\frac{1}{2}, 3\right)$ με $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2$

και $f(3) = 12$.

i. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in \left(\frac{1}{2}, 3\right)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f

στο $A(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στην ευθεία με εξίσωση $y = 4x + 2$.

ii. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\gamma \in \left(\frac{1}{2}, 3\right)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f

στο $B(\gamma, f(\gamma))$ να διέρχεται από το $O(0, 0)$.

14. A. Δίνεται συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη και κυρτή σε ένα διάστημα Δ . Να

δείξετε ότι:

$$f(a) + f(\beta) \geq 2 \cdot f\left(\frac{a+\beta}{2}\right), \text{ για κάθε } a, \beta \in \Delta.$$

B. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2-x^2}{x+1}$, $x > -1$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα.

ii. Αν $a > \frac{1}{e}$, $\beta > \frac{1}{e}$, να δείξετε ότι:

$$\frac{2 - \ln^2 a}{\ln a + 1} + \frac{2 - \ln^2 \beta}{\ln \beta + 1} \geq 2 \cdot \frac{2 - \ln^2 (\sqrt{a \cdot \beta})}{\ln (\sqrt{a \cdot \beta}) + 1}$$